Soluzioni del Tutorato di Statistica 1 del 18/03/2010
Docente: Prof.ssa Enza Orlandi
Tutore: Dott.ssa Barbara De Cicco

Esercizio 1. $X_1, ..., X_n$ campione casuale da $Exp(\lambda)$.
$E[X] = 1/\lambda$ quindi $\mu_1^{'} = 1/\lambda = M_1^{'} = \bar{X}$ da cui $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}$
Esercizio 2. $X_1, ..., X_n$ campione casuale da $Po(\lambda)$.
$E[X] = \lambda$ quindi $\mu_1^{'} = \lambda = M_1^{'} = \bar{X}$ da cui $\hat{\lambda} = \bar{X}$
Esercizio 3. $X_1, ..., X_n$ variabili aleatorie indipendenti con distribuzione $f_X(x) = \frac{1}{\theta^2} x e^{-x/\theta}$, $x > 0$, $\theta > 0$.

$E[X] = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\theta^2} e^{-x/\theta} dx = 2\theta$ quindi
$\mu_1^{'} = 2\theta = M_1^{'} = \bar{X}$ da cui $\hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{2}$
Esercizio 4.
Svolgiamo i due esercizi supponendo che $n = 10$ e $\sigma^2 = 1$ otteniamo:

1. $P(a_1 < S^2 < a_2) = P(\frac{a_1(n-1)}{\sigma^2} < \frac{S^2-1}{\sigma^2} < \frac{a_1(n-1)}{\sigma^2}) = P(9a_1 < U < 9a_2) = 0,9$ dove $U \sim \chi^2_{n-1}$
   Supponendo di dividere in modo equo l'area a sinistra di a_1 e a destra di a_2 si ottiene dalle tavole che: $P(U < 9a_1) = 0,05$ da cui $9a_1 = 3,33$ quindi $a_1 = 0,37$ e $P(U < 9a_2) = 0,95$ da cui $9a_2 = 16,9$ quindi $a_2 = 1,87$

2. $P(q_1 < \frac{\bar(X)-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < q_2) = P(q_1 < Z < q_2) = \Phi(q_2) - \Phi(q_1) = 0,95$ dove $Z \sim N(0,1)$
   Dalle tavole otteniamo $\Phi(q_2) = 0,975$ quindi $q_2 = 1,96$ e $\Phi(q_1) = 0,025$ quindi $q_1 = z_{0,025}$ poichfrm[o]–e la Gaussiana è simmetrica $q_1 = -q_1$

Esercizio 5.
Sia X v.a. $\sim \chi^2_5$.

1. $\chi^2_{0,10}(5) = 9,236$ e $\chi^2_{0,90}(5) = 1,610$
2. $P(1,145 \leq X \leq 12,83) = F(12,83) - F(1,145) = 0,975 - 0,050 = 0,925$
3. $P(X \geq 15.09) = 1 - F(15,09) = 1 - 0,99 = 0,01$

Esercizio 6. $X \sim \chi^2_7$
$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = 0,95$ da cui $F(b) = 0,975$ e $F(a) = 0,025$ da cui dalle tavole ottengo che
$b = 16,0$ ed $a = 1,69$
Esercizio 7.

1. $X \sim N(3,16)$, $P(4 \leq X \leq 8) = P(\frac{4-3}{4} \leq Z \leq \frac{8-3}{4}) = \Phi(5/4) - \Phi(1/4) = 0,2957$
2. $X \sim N(25,36)$, $P(|X - 25| \leq c) = P(-c \leq X - 25 \leq c) = P(-c/6 \leq Z \leq c/6) = 2\Phi(c/6) - 1 = 0,9544$ si ottiene che $c = 12$

Esercizio 8. $\bar{X}$ la media campionaria di un campione di taglia 25 da una distribuzione t.c. $f(x) = \frac{x^3}{4}$ con $0 < x < 2$.

$E[X] = \int_0^2 \frac{x^3}{4} dx = 8/5$
$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \int_0^2 \frac{x^5}{4} dx - 64/25 = 8/75$
$P(1,5 \leq \bar{X} \leq 1,65) = P(\frac{1,5-1,6}{\sqrt{8/75/5}} < \frac{\bar{X}-1,6}{\sqrt{8/75/5}} < \frac{1,65-1,6}{\sqrt{8/75/5}}) = P(-1,531 < Z < 0,765) = \Phi(0,765) - \Phi(-1,531) = 0,7779 - 0,0629 = 0,7150$

Esercizio 9.

$X_i \sim Bernouilli(1/2)$ quindi $\sum_{i=1}^n X_i \sim Bin(n, 1/2)$
$P(0,4 < \bar{X} < 0,6) = 0,90$ $P(|\bar{X} - \mu| \geq \sigma\lambda) \leq 1/\lambda^2$ da imponendo $1/\lambda^2 = 0,90$ si ottiene che $\lambda = 1,05$ $P(-1,05\sigma < \bar{X} - \mu < 1,05\sigma) = P(-1,05\frac{\sqrt{n}}{2} < \bar{X} - \mu < 1,05\frac{\sqrt{n}}{2}) = P(-1,05\frac{\sqrt{n}}{2} + \mu < \bar{X} < 1,05\frac{\sqrt{n}}{2} + \mu)$ e quindi
$1,05\frac{\sqrt{n}}{2} + n/2 = 0,6$ da cui ricavo $n = 2$

$P(0,4 < \bar{X} < 0,6) = P(\frac{0,4-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{0,6-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}) = P(\frac{0,4-n/2}{\sqrt{(n/4)/n}} < Z < \frac{0,6-n/2}{\sqrt{(n/4)/n}}) = \Phi(\frac{0,6-n/2}{\sqrt{(n/4)/n}}) - \Phi(\frac{0,4-n/2}{\sqrt{(n/4)/n}}) = 0,90$
Dalle tavole ricavo che $n = 1$